

5 задач на банковские проценты

(По материалам журнала «Математика», №8, 2016, с.32)

М03.1.

15 января планируется взять кредит в банке на 6 месяцев в сумме 6 млн рублей. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 1% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Определите суммы платежей за первые три и последние три месяца.

Решение. Пусть каждый месяц 15-го числа сумма долга в 6 млн руб. уменьшается на одну и ту же величину. Так как она уменьшается до нуля за 6 месяцев, то за каждый месяц она уменьшается на 1 (здесь и далее все денежные суммы выражены в млн руб.). Суммы долга на 15-е число каждого месяца записаны во втором столбце таблицы 1.

Таблица 1

	6	6,06	
1	5	5,05	1,06
2	4	4,04	1,05
3	3	3,03	1,04
4	2	2,02	1,03
5	1	1,01	1,02
6	0		1,01

1-го числа следующего месяца эти суммы увеличиваются на 1%, то есть в 1,01 раза (см. третий столбик). Со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга так, чтобы сумма из третьего столбика уменьшилась до суммы из второго столбика следующей строки. В первый месяц надо уменьшить сумму долга с 6,06 до 5, то есть надо заплатить $6,06 - 5 = 1,06$, во второй месяц надо заплатить $5,05 - 4 = 1,05$, ..., в шестой – $1,01 - 0 = 1,01$ (см. четвертый столбик).

За первые три месяца надо заплатить $1,06 + 1,05 + 1,04 = 3,15$,

за последние три месяца надо заплатить $1,03 + 1,02 + 1,01 = 3,06$.

М03.2.

15 января планируется взять кредит в банке на 6 месяцев. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 1% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что в течение трех последних месяцев кредитования нужно вернуть банку 3,06 млн рублей. Какую сумму нужно вернуть банку в течение первых трёх месяцев кредитования?

Решение. Пусть кредит взят в сумме x млн рублей (далее все суммы указаны в млн рублей). Пусть каждый месяц 15-го числа сумма долга уменьшается на одну и ту же величину. Она уменьшается до нуля за 6 месяцев, следовательно, за каждый месяц она уменьшается на $(1/6)x$. Суммы долга на 15-е число каждого месяца записаны во втором столбце таблицы 2. 1-го числа следующего месяца эти суммы увеличиваются на 1%, то есть в 1,01 раза (см. третий столбик). Со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга так, чтобы сумма из второго столбика уменьшилась до суммы из первого столбика следующей строки (см. четвертый столбик).

По условию задачи составим уравнение: $\frac{1,03}{6}x + \frac{1,02}{6}x + \frac{1,01}{6}x = 3,06$, и найдем его единственный корень $x = 6$.

Теперь вычислим сумму платежей за первые три месяца при $x = 6$:

$$\frac{1,06}{6}x + \frac{1,05}{6}x + \frac{1,04}{6}x = 3,15.$$

Итак, в первые три месяца предстоит выплатить банку 3,15 млн рублей.

Таблица 2

	x	$1,01x$	
1	$\frac{5}{6}x$	$\frac{1,01 \cdot 5}{6}x$	$1,01 - \frac{5}{6}x = \frac{1,06}{6}x$
2	$\frac{4}{6}x$	$\frac{1,01 \cdot 4}{6}x$	$\frac{1,01 \cdot 5}{6}x - \frac{4}{6}x = \frac{1,05}{6}x$
3	$\frac{3}{6}x$	$\frac{1,01 \cdot 3}{6}x$	$\frac{1,04}{6}x$
4	$\frac{2}{6}x$	$\frac{1,01 \cdot 2}{6}x$	$\frac{1,03}{6}x$
5	$\frac{1}{6}x$	$\frac{1,01 \cdot 1}{6}x$	$\frac{1,02}{6}x$
6	0		$\frac{1,01}{6}x$

М03.3.

15 января планируется взять кредит в банке на 24 месяца. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 1% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что в течение второго года (последних 12 месяцев) кредитования нужно вернуть банку 798,75 тыс. рублей. Какую сумму нужно вернуть банку в течение первого года (первых 12 месяцев) кредитования?

Решение. Пусть кредит взят в сумме x тыс. рублей (далее все суммы указаны в тыс. рублей). Пусть каждый месяц 15-го числа сумма долга уменьшается на одну и ту же величину. Она уменьшается до нуля за 24 месяца, следовательно, за каждый месяц она уменьшается на $(1/24)x$. Суммы долга на 15-е число каждого месяца записаны во втором столбце таблицы 3. 1-го числа следующего месяца эти суммы увеличиваются на 1%, то есть в 1,01 раза (см. третий столбик). Со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга так, чтобы сумма из третьего столбика уменьшилась до суммы из второго столбика следующей строки (см. четвертый столбик).

По условию задачи составим уравнение

$$\frac{1,12}{24}x + \frac{1,11}{24}x + \dots + \frac{1,01}{24}x = 798,75,$$

и найдем его единственный корень $x = 1500$.

Теперь вычислим сумму платежей за первые 12 месяцев при $x = 1500$:

$$\frac{1,24}{24}x + \frac{1,23}{24}x + \dots + \frac{1,13}{24}x = 888,75.$$

Итак, в первые 12 месяцев предстоит выплатить банку 888,75 тыс. рублей.

Таблица 3

	x	$1,01x$	
1	$\frac{23}{24}x$	$\frac{23,23}{24}x$	$1,01x - \frac{23}{24}x = \frac{1,24}{24}x$
2	$\frac{22}{24}x$	$\frac{22,22}{24}x$	$\frac{23,23}{24}x - \frac{22}{24}x = \frac{1,23}{24}x$
3	$\frac{21}{24}x$	$\frac{21,21}{24}x$	$\frac{1,22}{24}x$
...			
12	$\frac{12}{24}x$	$\frac{12,12}{24}x$	$\frac{1,13}{24}x$
13	$\frac{11}{24}x$	$\frac{11,11}{24}x$	$\frac{1,12}{24}x$
...			
23	$\frac{1}{24}x$	$\frac{1,01}{24}x$	$\frac{1,02}{24}x$
24	0		$\frac{1,01}{24}x$

М03.4.

15 января планируется взять кредит в банке на 5 месяцев. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 1% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Сколько процентов от суммы кредита составляет общая сумма денег, которую нужно выплатить за весь срок кредитования?

Таблица 4

Решение. Пусть кредит взят в сумме x рублей (далее все суммы указаны в рублях). Пусть каждый месяц 15-го числа сумма долга уменьшается на одну и ту же величину. Она уменьшается до нуля за 5 месяцев, следовательно, за каждый месяц она уменьшается на $(1/5)x$. Далее решение аналогично предыдущим решениям, для краткости рассмотрим сразу таблицу 4.

Общая сумма денег, выплаченных банку, равна

$$\frac{1,05}{5}x + \frac{1,04}{5}x + \frac{1,03}{5}x + \frac{1,02}{5}x + \frac{1,01}{5}x = 1,03x,$$

что составляет 103% от суммы кредита. То есть за весь срок кредитования нужно выплатить банку 103% от суммы кредита.

	x	$1,01x$	
1	$\frac{4}{5}x$	$\frac{4,04}{5}x$	$1,01x - \frac{4}{5}x = \frac{1,05}{5}x$
2	$\frac{3}{5}x$	$\frac{3,03}{5}x$	$\frac{4,04}{5}x - \frac{3}{5}x = \frac{1,04}{5}x$
3	$\frac{2}{5}x$	$\frac{2,02}{5}x$	$\frac{1,03}{5}x$
4	$\frac{1}{5}x$	$\frac{1,01}{5}x$	$\frac{1,02}{5}x$
5	0		$\frac{1,01}{5}x$

М03.5. 31 декабря 2014 года Алексей взял в банке 6 902 000 рублей в кредит под 12,5% годовых.

Схема выплаты кредита следующая:

31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 12,5%), затем Алексей переводит в банк x рублей.

Какой должна быть сумма x , чтобы Алексей выплатил долг четырьмя равными платежами (то есть за 4 года)?

Решение. Пусть кредит взят в сумме $a = 6\,902\,000$ рублей (далее все суммы указаны в рублях). Через год сумма долга увеличится на 12,5%, то есть в $1,125 = 9/8$ раза. Затем Алексей переведет банку x рублей, к 31 декабря 2015-го его долг составит $(9/8)a - x$. Далее заполняем в таблице 5 два столбца: долг на 31 декабря текущего года и остаток долга на конец того же года:

Таблица 5

1	$\frac{9}{8}a$	$\frac{9}{8}a - x$
2	$\frac{9}{8}\left(\frac{9}{8}a - x\right)$	$\frac{9}{8}\left(\frac{9}{8}a - x\right) - x = \frac{9^2}{8^2}a - \frac{17}{8}x$
3	$\frac{9}{8}\left(\frac{9^2}{8^2}a - \frac{17}{8}x\right)$	$\frac{9}{8}\left(\frac{9^2}{8^2}a - \frac{17}{8}x\right) - x = \frac{9^3}{8^3}a - \frac{217}{8^2}x$
4	$\frac{9}{8}\left(\frac{9^3}{8^3}a - \frac{217}{8^2}x\right)$	$\frac{9}{8}\left(\frac{9^3}{8^3}a - \frac{217}{8^2}x\right) - x = \frac{9^4}{8^4}a - \frac{2465}{8^3}x$

Так как остаток долга равен нулю после четвертой выплаты суммы x , то остается решить уравнение, заменив в нем a на

$$6\,902\,000: \frac{9^4 \cdot 6\,902\,000}{8^4} - \frac{2465}{8^3}x = 0.$$

Оно имеет единственный корень $x = 2\,296\,350$.

То есть сумма x должна быть равна 2 296 350 рублей.